Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

équation, était non plus la distance r ou z, mais l'une des coordonnées rectangulaires de l'astre observé. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Méthode générale pour la résolution des systèmes d'équations simultanées; par* M. AUGUSTIN CAUCHY.

« Étant donné un système d'équations simultanées qu'il s'agit de résoudre, on commence ordinairement par les réduire à une seule, à l'aide d'éliminations successives, sauf à résoudre définitivement, s'il se peut, l'équation résultante. Mais il importe d'observer, 1° que, dans un grand nombre de cas, l'élimination ne peut s'effectuer en aucune manière; 2° que l'équation résultante est généralement très-compliquée, lors même que les équations données sont assez simples. Pour ces deux motifs, on conçoit qu'il serait très-utile de connaître une méthode générale qui pût servir à résoudre directement un système d'équations simultanées. Telle est celle que j'ai obtenue, et dont je vais dire ici quelques mots. Je me bornerai pour l'instant à indiquer les principes sur lesquels elle se fonde, me proposant de revenir avec plus de détails sur le même sujet, dans un prochain Mémoire.

» Soit d'abord

$$u = \mathrm{f}(x, y, z)$$

une fonction de plusieurs variables x, y, z,..., qui ne devienne jamais négative et qui reste continue, du moins entre certaines limites. Pour trouver les valeurs de x, y, z,..., qui vérifieront l'équation

$$u = 0, \tag{1}$$

il suffira de faire décroître indéfiniment la fonction u, jusqu'à ce qu'elle s'évanouisse. Or soient

$$\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z},\ldots$$

des valeurs particulières attribuées aux variables x, y, z,...; u la valeur correspondante de u; X, Y, Z,... les valeurs correspondantes de $\mathrm{D}_x u$, $\mathrm{D}_y u$, $\mathrm{D}_z u$,..., et α, β, γ,... des accroissements très-petits attribués aux valeurs particulières x, y, z,.... Quand on posera

$$x = \mathrm{x} + \alpha, \quad y = \mathrm{y} + \beta, \quad z = \mathrm{z} + \gamma, \ldots,$$

on aura sensiblement

$$u = \mathrm{f}(\mathrm{x} + \alpha, \mathrm{y} + \beta, \ldots) = \mathrm{u} + \alpha\mathrm{X} + \beta\mathrm{Y} + \gamma\mathrm{Z} + \ldots. \tag{2}$$

Concevons maintenant que, θ étant une quantité positive, on prenne

$$\alpha = -\theta X, \quad 6 = -\theta Y, \quad \gamma = -\theta Z, \ldots.$$

La formule (2) donnera sensiblement

$$(3) \qquad f(x - \theta X, y - \theta Y, z - \theta Z, \ldots) = u - \theta(X^2 + Y^2 + Z^2 \ldots).$$

Il est aisé d'en conclure que la valeur Θ de u, déterminée par la formule

$$(4) \qquad \Theta = f(x - \theta X, y - \theta Y, z - \theta Z, \ldots),$$

deviendra inférieure à u, si θ est suffisamment petit. Si, maintenant, θ vient à croître, et si, comme nous l'avons supposé, la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ est continue, la valeur Θ de u décroîtra jusqu'à ce qu'elle s'évanouisse, ou du moins jusqu'à ce qu'elle coïncide avec une valeur *minimum*, déterminée par l'équation à une seule inconnue

$$(5) \qquad D_\theta \Theta = 0.$$

Il suffira donc, ou de résoudre cette dernière équation, ou du moins d'attribuer à θ une valeur suffisamment petite, pour obtenir une nouvelle valeur de u inférieure à u. Si la nouvelle valeur de u n'est pas un *minimum*, on pourra en déduire, en opérant toujours de la même manière, une troisième valeur plus petite encore; et, en continuant ainsi, on trouvera successivement des valeurs de u de plus en plus petites, qui convergeront vers une valeur minimum de u. Si la fonction u, qui est supposée ne point admettre de valeurs négatives, offre des valeurs nulles, elles pourront toujours être déterminées par la méthode précédente, pourvu que l'on choisisse convenablement les valeurs de x, y, z,....

» Il est bon d'observer que, si la valeur particulière de u représentée par u est déjà très-petite, on pourra ordinairement en déduire une autre valeur Θ beaucoup plus petite, en égalant à zéro le second membre de la formule (3), et en substituant la valeur qu'on obtiendra ainsi pour θ, savoir,

$$(6) \qquad \theta = \frac{u}{X^2 + Y^2 + Z^2 + \ldots},$$

dans le second membre de la formule (4).

» Supposons maintenant que les inconnues $x, y, z, \ldots$ doivent satisfaire non plus à une seule équation, mais à un système d'équations simultanées

$$(7) \qquad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \ldots,$$

dont le nombre pourra même surpasser celui des inconnues. Pour ramener ce dernier cas au précédent, il suffira de substituer au système (7) l'équation unique

$$u^2 + v^2 + w^2 \ldots = 0. \tag{8}$$

» Quand, à l'aide de la méthode que nous venons d'indiquer, on aura déterminé des valeurs déjà très-approchées des inconnues $x, y, z, \ldots$, on pourra, si l'on veut, obtenir de nouvelles approximations très-rapides à l'aide de la méthode linéaire ou newtonienne, dont j'ai fait mention dans le Mémoire du 20 septembre.

» On peut tirer des principes ici exposés un parti très-avantageux pour la détermination de l'orbite d'un astre, en les appliquant non plus aux équations différentielles, mais aux équations finies qui représentent le mouvement de cet astre, et en prenant pour inconnues les éléments mêmes de l'orbite. Alors les inconnues sont au nombre de six. Mais le nombre des équations à résoudre est plus considérable, quelques-unes d'entre elles servant à définir des fonctions implicites des inconnues; et d'ailleurs le nombre des équations croît avec le nombre des observations que l'on veut faire concourir à la solution du problème. Ajoutons que les seuls nombres qui entrent dans les équations à résoudre sont les longitudes, latitudes, etc., fournies par les observations elles-mêmes. Or ces longitudes, latitudes, etc., sont toujours plus exactes que leurs dérivées relatives au temps, qui entrent dans les équations différentielles. Donc, après avoir obtenu à l'aide des équations différentielles, ainsi que nous l'avons expliqué dans les précédents Mémoires, des valeurs approchées des inconnues, on pourra, en partant de ces valeurs approchées, et en résolvant, comme nous venons de le dire, les équations finies du mouvement de l'astre, obtenir une précision très-grande dans les résultats du calcul. »

CHIMIE. — *Recherches sur les tungstates; par* M. Aug. Laurent.

« Dans le Mémoire que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie sur les silicates, j'ai essayé d'établir diverses propositions, afin de rattacher la composition de ces sels à des formules plus simples que celles que l'on admet généralement.

» Les analyses, la forme cristalline et le volume atomique de quelques silicates, des fers chromés et titanés, des ganhites, des spinelles, des franklinites, etc., suffisent pour mettre hors de doute quelques-unes de ces